COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - 15 LUGLIO 2008

PROF. SUSANNA TERRACINI

1) (a) Dimostrare che, data una successione di insiemi misurabili $\{A_n\}$, a due a due disgiunti e se $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, allora
$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$
(b) Dedurne che se una successione di insiemi misurabili $\{A_n\}$ è monotona non decrescente rispetto all'inclusione, allora, detta $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, si ha
$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)\ .$$
(c) Dedurne infine che se $\{f_n\}$ è una successione non decrescente di funzioni misurabili allora la funzione $f(x) = \sup_n f_n(x)$ è misurabile e che la sua funzione di distribuzione è il limite puntuale della successione delle funzioni di distribuzione delle f_n.

2) (a) Scrivere la definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue su un insieme di misura finita.
(b) Dimostrare che, se f è Lebesgue integrabile, ne segue che per ogni successione di funzioni semplici uniformemente convergente ad f il limite degli integrali esiste e che non dipende dalla successione prescelta.
(c) Dimostrare che se esiste una successione di funzioni misurabili, non integrabili, uniformemente convergente alla funzione f allora questa non è Lebesgue integrabile.

3) Studiare la convergenza in $L^1(\mathbf{R})$ della successione
$$f_n(x) = \arctan(nx)\ .$$

4) (a) Enunciare il Teorema Fubini.
(b) Utilizzando tale teorema dimostrare la formula $\beta(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$, dove $\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ e $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\, e^{-t}\, dt$ e p, q sono numeri positivi qualsiasi.

5) Sia data la 2–forma nello spazio
$$\omega = z\, dx \wedge dy - x\, dy \wedge dz\ .$$
(a) Calcolare $d\omega$. Stabilire se esiste una 1–forma λ di cui ω sia il differenziale.
(b) Detta Σ la superficie della semisfera unitaria: $\Sigma = \{(x,y,z)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\,, z = \sqrt{1-x^2-y^2}\}$, calcolare
$$\int_\Sigma \omega\ .$$